

Universidade Federal Fluminense - GMA
Reposição de VE1 - Cálculo 2B - Turma C1+C2 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: _____ Data: 06 de Dezembro de 2018

Questão 1 (15 pts). Descreva e esboce o maior domínio possível para que a expressão abaixo torne função:

$$f(x, y) = \ln(x^2 - 2xy + y^2 - 1) - \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - 1}.$$

Questão 2 (15 pts). Verifique a existência do limite abaixo. Se existir, encontre o valor do limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} \frac{\tan(y + e^x - 1) - 1}{1 + \frac{\pi}{4} - y - e^x}.$$

Dica: Encontre as funções $f : D_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que a expressão acima dentro limite fica na forma $f(g(x, y))$. Obtenha o valor $u_0 := \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} g(x, y)$ e use a propriedade de que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} f(g(x, y)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$$

para verificar a existência do limite acima e encontrar o seu valor. Provavelmente você também vai precisar aplicar L'Hôpital e usar $\frac{d}{dt}(\tan(t)) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Questão 3 (30 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^x - x - 1)y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (14 pts) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0, 0)$.

Dica: Use a expansão de Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ e aplique o Teorema de Anulamento corretamente mostrando qual parte da expressão é limitada e qual parte vai para zero.

(b) (6 pts) Calcule o vetor gradiente $\nabla f(0, 0)$ da função f no ponto $(0, 0)$.

(c) (10 pts) Mostrar que f não é diferenciável no ponto $(0, 0)$.

Questão 4 (20 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela equação:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6xy^2}{x^2 + 9y^4}, & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (15 pts) Encontre a expressão $x = g(y)$ de um conjunto de nível k da função f (Dica: você tem que resolver uma equação de segundo grau isolando o variável x).

(b) (5 pts) Prove que a função f não é contínua no ponto $(0, 0)$.

Questão 5 (20 pts). Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela expressão:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0). \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (10 pts) Prove que a função f é diferenciável em $(0, 0)$. (Dica: Note que $-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, use o Teorema de Sanduíche corretamente justificando cada passo do seu argumento).

(b) (10 pts) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(0, 2, f(0, 2))$.

Boa Prova!